# ぼくのかんがえたさいきょうのとうあん

にーと

作成日 2020 年 8 月 2 日

## [A-1]

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2a \\ 2 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(1)** $A$ が逆行列をもたないような $a$ の値を求める.

**(2)** $A$ が逆行列をもたないとき, 次の方程式を解け.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(3)** $a = 0$ のとき, $A$ は対角化可能化か.

(1)

$\det A = 2a^2 - 2 = 0$ をとき, $a = \pm 1$ を得る.[*1]

(2)

まず, $a = 1$ のとき, 係数拡大行列を行基本変形していくと,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[*1] なんだかとても死にたいので急ぎ足で行きます.

次に $a=-1$ とする. 同様に行基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

従って, $a=-1$ のときは解なし.[*2]

(3)

$a=0$ とする. このとき,

$$|A-\lambda E| = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

よって, 固有値は $\lambda = -2, 1$.

$\lambda=-2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 1$ のとき,

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ゆえに一次独立な固有ベクトルを 2 つしか取れない. 従って対角化不可能である.( ´ ; ω ; ` )

## [A-2]

$\boldsymbol{e_1} = (1,0,0), \boldsymbol{e_2} = (0,1,0)$, $\langle \boldsymbol{e_1} \rangle =: W_1$, $\langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2} \rangle =: W_2$. 集合 $F$ を線形写像の集合として, 次のように定める.

$$F = \{f; f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}, f(W_1) \subset W_1, f(W_2) \subset W_2\}.$$

---

[*2] 途中でやる気がなくなったようで, 行列が途切れて読めなかった.

このとき,

**(1)** $F$ は $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3)$ の部分空間であることを示せ.

**(2)** $F$ の次元を求めよ.

**(3)** $f \in F$ が $f^3 = 0$ を満たすとき,

$$f(\mathbf{R}^3) \subset W_2, \quad f(W_2) \subset W_1, \quad f(W_1) = \{0\}$$

を示せ.

**(4)** $f \in F$ のうち, $f^3 = 0$ を満たすもの全体を $G$ とするとき, $G$ が部分空間であることを示し, $\dim G$ を求めよ.

疲れてきたねぇ ( ´・ω・‘) なんでこんなことやってんだろう、誰も読まないのに。
まぁええか。暇つぶししてたほうがやまないし。

ていうか、死のうかな・ з ・

さて, まぁあんまり飛ばしてもしかたないし, 少し教育的配慮も込めつつやりますかね ( ´・ω・‘)

(1)

少し問題が抽象的なので, 何を示せばいいかを整理する. これができれば, 配点 50 点のうち, (私なら) 10 点は計上すると思う.

$f, g \in F, \lambda \in \mathbf{R}$ を任意にとる. $F$ が部分空間であることとは, $\forall f, g \in F$, 1, $(f+g) \in F, 2, \lambda f \in F$ の 2 つが成り立つことである. 本文に置き換えれば, 次と同値.

$$\begin{cases} 1-1 \quad (f+g)(W_1) \subset W_1 \\ 1-2 \quad (f+g)(W_2) \subset W_2 \\ 2-1 \quad (\lambda f)(W_1) \subset W_1 \\ 2-2 \quad (\lambda f)(W_2) \subset W_2 \end{cases}$$

更に言えば, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$,

$$\begin{cases} 1-1' \quad (f+g)(\boldsymbol{x}) \in W_1 \\ 1-2' \quad (f+g)(\boldsymbol{x}) \in W_2 \\ 2-1' \quad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) \in W_1 \\ 2-2' \quad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) \in W_2 \end{cases}$$

を示せば良い.

1-1' のみを示す. $W_1 \ni \forall \boldsymbol{x} := (p, 0, 0), f(\boldsymbol{x}) = (\alpha, 0, 0), g(\boldsymbol{x}) = (\beta, 0, 0)$ とすると,

$$\begin{aligned}(f+g)(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\in W_1.\end{aligned}$$

残りの 3 つは教育的配慮として残しておく.

(2)

$F$ の次元を求める. 次の事実を使う. すなわち, $f$ が線形写像であるとき, その $f$ を表す行列 $A = A_f$ が存在し,

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}.$$

$$A = A_f := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

$A(W_1) \subset W_1, A(W_2) \subset W_2$ を成分計算することにより,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

が得られる. 逆に, この形であれば $A(W_1) \subset W_1, A(W_2) \subset W_2$ が満たされることは明らか.

従って,

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

すなわち, $\dim F = 6$.

(3)

同様にして, $f^3 = \mathbf{0}$ となるような, $A_f$ の条件を成分計算によって求めればよい. 実際に簡単な計算によって,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という形であることが必要であることが必要であり, 逆も成り立つことは明らか.

すなわち,

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

であって, $G$ が $F$ の部分空間をなすことも, $\dim G = 3$ であることも明らか.

# [A-3]

自明につき略.[*3]

## [A-4]

さてこの問題のみ下書きがないのであるが, 本当はこの問題を解くためだけに, 3 つの問題の解答を作り上げたみたいなところがある. 自分らしい解答を心がけてやっていく.( ´・ω・‘)

複素数平面内の閉円板 $|z-z_0| \leq r$ を含むある領域で正則[*4]な関数 $f(z)$ を考える. $z_0$ は $f(z)$ の零点で, その位数[*5]を $N$ とする. 以下の問に答えよ.

**(1)** 円周 $|z-z_0| = r$ 上に $f$ の零点がないものとして,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f'}{f}dz$$

は $|z-z_0| < r$ 内に含まれる, $f$ の零点の位数の総和に等しいことを示せ.

**(2)** 正数 $r_0$ を十分小さく取ると, $|z-z_0| \leq r_0$ 上の零点を $z_0$ のみとできる.$a\mathbf{C}$ を, $|z-z_0 = r_0|$ 上で常に, $0 < |a| < |f(z)|$ となるようにとるとき,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r_0}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r_0}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

を示せ.

**(3)** (2) の $r_0$ について, さらに閉円板 $|z-z_0| \leq r_0$ 上 $f' \neq 0$ とすると, $f(z) = a$ となる閉円板 $|z-z_0| < r_0$ 上の相異なる $z$ がちょうど $N$ 個存在することを示せ.

いやぁいいっすね ( ´・ω・‘) すばらしいですね、これこそが複素解析学って感じ。

ぐるって積分しちゃえばその範囲の解の個数がでてきてしまう。二分法だかモンテカルロ法だかなんだか知らねぇが、少しずつ範囲をちっちゃくしながらぐるぐる積分していけば解の存在する範囲を特定余裕ってぇ寸法よ。素晴らしいですねぇ ( ´・ω・‘) いやぁ革命。

ということを保証する定理として, Rouche(ルーシェ) の定理というこれまた強力な定理があります. 証明は複素解析の本を読んでくださいね ( ´・ω・‘) 主張のみ述べます.

$f(z), g(z)$ をそれぞれ正則な関数とする. ある閉円周上で常に $|f(z)| > |g(z)|$ が常に成り立つのであれば, その円内部での $f(z) = 0$ の解の個数と, $f(z) + g(z) = 0$ の解の個数は一致する.

---

[*3] 炎上覚悟でいうけど, 多分こういう問題じゃないと解いてくれないのであろう. 受からせてあげなくちゃいけない大学も可哀想だけど, 倍率 1 倍だとしても半数ぐらいは落としてあげたほうがいいと思う.(個人の感想です.)

[*4] 微分可能ということ

[*5] 何重根かということ

懸命な読者であれば既にお気づきのことと思われるが,[*6] この定理を認めると代数学の基本定理を即座に示すことができる. 脱線だがやっておく.

$$f(z) = z^n,$$
$$g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

と定める. $f, g$ はそれぞれ正則関数である. 十分大きな円周, $|z| = R$ をとることによって,[*7] 円周上では常に $|f| \geq |g|$ であろう. 従って, Rouche の定理を用いれば, この円の内部にある $f(z) + g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ の解の個数は, $f(z) = z^n = 0$ の解の個数と一致してしまい, これは要するに $n$ であろうということになる.[*8]すなわち $n$ 次方程式は, $n$ 個複素数平面に解がある!ということになる (´・ω・‘)！！！

さて脱線のように見えてこれは全く脱線ではない. 正直これを書いてしまえば 50 点中私なら 25 点をあげたくなってしまうぐらいのものだ.
まぁそろそろ示していくが直感的かつ雑な答案を目指す.

(1)

$$\oint_{|z-z_0|} = \oint_{c_1} + \cdots + \oint_{c_n}$$

と, 積分範囲を小さな円周によって分割できる. 各 $c_i$ における積分が, その地点での位数に一致することを示せば良い. 当地点の位数が $M$ であったとするとき, 局所的に

$$f(z) = (z - z_i)^M P(z)$$

とみなせよう.[*9] このとき,

$$f'(z) = M(z - z_i)^{M-1}P(z) + (z - z_i)^M P(z)$$

であるから,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{M}{z - z_i} + \frac{P'(z)}{P(z)}.$$

Cauthy の積分公式 (あるいは留数定理) によれば, これら積分が計算できる. 特に, $\oint P'(z)/P(z)dz = 0$ である.[*10]ゆえに,

$$\oint \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i M.$$

よって示せた.

(2)

[*6] 言いたすぎた (´・ω・‘)!
[*7] 例えば $R = 10000000000000$ とか?
[*8] $f(z) = z^n = 0$ の解は $z = 0$ のみ (位数 $n$)
[*9] 証明は読者に任せる (´・ω・‘)
[*10] Cauthy の積分定理

多分 Rouche の定理がばっちりと適用できるんだろうね ( ´・ω・‘) ということがすけてみえれば大丈夫.

$f(z) = 0$ の解の個数と, $f(z) - a = 0$ の解の個数が一致するということ, $f'(z) = (f(z) - a)'$ であるという事実により, 自明に成り立つ.

(3)

いずれかの点で, 2 位の極をもつとしよう. 当該点を $z = z_i$ とすれば, $f(z) = (z - z_i)^2 g(z)$ とおけ, $f'(z) = 2(z - z_i)g(z) + (z - z_i)^2 g'(z)$ となるいるから, 円の内部で零点をとってしまう. したがって, 2 位以上の極は持ちえない.

最後らへん体力の限界で適当になってしまって済まないねぇ ( ´・ω・‘) そのうち気が向いたら直します、ってことでここはひとつ。

死にたいなぁ ( ´ ; ω ; ` )