ぼくのかんがえたさいきょうのとうあん

にーと

作成日 2020 年 7 月 26 日

[A-1]

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求める.

$$\begin{aligned} |A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2-1)+\lambda+1+1+\lambda \\ &= -\lambda+3\lambda+2 \\ &= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

ゆえに固有値は, $\lambda=-1,2$.

(2) A の固有空間の次元を求めよ.

固有ベクトルを求めていく.
$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, すなわち $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を考えよう.
($\lambda=-1$ のとき)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとけば良い. [*1]

この連立方程式は $x-y+z=0$ と同値である. 連立方程式の自由度は 2 であるから, $s,t\in\mathbf{R}$ の 2 つの自由変数を用いる. $y=s, z=t$ とすると, $x=s-t$ である. よって, 解は次のように表せる.

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\lambda=2$ のとき)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとけば良い.

この連立方程式は $x-y=0, y+z=0$ と同値である. 連立方程式の自由度は 1 であるから, $u\in\mathbf{R}$ の 2 つの自由変数を用いる. $z=u$ とすると, $x=u, y=-u, z=u$ である. よって, 解は次のように表せる.

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルとして,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一次独立なベクトルを 3 本とれることから, 次元は 3 であることがわかる.

(3) A の固有ベクトルから $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求める.

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき,

$$\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}, \frac{\boldsymbol{2a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{3}, \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{2b}+\boldsymbol{c}}{3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は正規直交基底をなす.

[*1] saitama_190821.pdf のコピペなので, 行列を書くのがぜんぜんしんどくない. 楽だ. ただし LaTeX の勉強になるかどうかでいえば, 全くならないといえる. どちらかというと Vim の勉強ということにする.

[A-2]

V を有限次元ベクトル空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形変換とする. 次の 5 条件は同値であることを示せ.
(i) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$
(ii) 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^n)$
(iii) 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^n)$
(iv) $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
(v) $V = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$

(i)⇒(ii)
$\mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Im}(f(\mathrm{Im}(f^2))) = \mathrm{Im}(f(\mathrm{Im}(f))) = \mathrm{Im}(f^2)$ である. 以下帰納的になりたつ.

(ii)⇒(iii)
$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ であるから, $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$ が従う. すなわち, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
次元定理により,

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ \dim(V) &= \dim(\mathrm{Im}(f^2)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \\ &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2))\end{aligned}$$

よって $\dim(\mathrm{Ker}(V)) = \dim(\mathrm{Ker}(V^2))$ が従う.
$\mathrm{Ker}(f) = \langle \boldsymbol{v_1}, \cdots \boldsymbol{v_m} \rangle$ とする. ここで $\mathrm{Ker}(f^2) \setminus \mathrm{Ker}(f) \ni \forall \boldsymbol{a}$, がとれるとすると, $\boldsymbol{a}$ は $\mathrm{Ker}(f)$ と一次独立であるから, $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) > \dim(\mathrm{Ker}(f))$ が従う. これは矛盾.

(iii)⇒ (iv)
$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ と仮定する. このとき $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) \geq 1$ である. 次元定理により,

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim(\mathrm{Im}(f^2)) + \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) \\ &> \dim(\mathrm{Im}(f^2)).\end{aligned}$$

これは $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ に反する. よって, $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) = 0$, すなわち $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

(iv)⇒(v)
$\mathrm{Im}(f), \mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ V 上の部分空間であるから, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = m, \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \langle \boldsymbol{v_1}, \cdots \boldsymbol{v_m} \rangle \\ \mathrm{Ker}(f) &= \langle \boldsymbol{u_1}, \cdots \boldsymbol{u_n} \rangle\end{aligned}$$

とおける. ここで次元定理により,

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ &= m + n.\end{aligned}$$

ここで

$$(\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots \alpha_m \boldsymbol{v_m}) + (\beta_1 \boldsymbol{u_1} + \cdots \beta_n \boldsymbol{u_n}) = 0$$

とすると,

$$\alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots \alpha_m \boldsymbol{v_m} = -(\beta_1 \boldsymbol{u_1} + \cdots \beta_n \boldsymbol{u_n})(= \boldsymbol{k}) \tag{1}$$

(1)[*2] の L.H.S. $\in \mathrm{Im}(f)$ でありまた, (1) の R.H.S. $\in \mathrm{Ker}(f)$ でもあるから,

$$\boldsymbol{k} \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$$

が従う．ゆえに, $\alpha_1 = \cdots \alpha_m = 0, \beta_1 = \cdots \beta_n = 0$ がわかり, $\alpha_1, \cdots \alpha_m, \beta_1, \cdots \beta_n$ はそれぞれ一次独立であることがわかる．次元定理より, $\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = m + n$ であるが, $\dim \langle \alpha_1, \cdots \alpha_m, \beta_1, \cdots \beta_n \rangle = n + m$ でもあるため,

$$\begin{aligned} V &= \langle \alpha_1, \cdots \alpha_m \rangle \oplus \langle \beta_1, \cdots \beta_n \rangle \\ &= \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f). \end{aligned}$$

よって示せた.

(v)⇒(i)
$V = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ に両辺 f を作用させると, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \cup \{0\}$ が従う．よって示せた.

[A-3]

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x), g(x)$ の収束半径を求めよ.
(2) $f' = g, f'' = af$ を示せ.(一部改題)
(3) 任意の x, y に対して,

$$g(x+y) = g(x)g(y) - af(x)f(y)$$

を示せ.
(4) 任意の x に対して, $(g(x))^2 - a(f(x))^2 = 1$ を示せ.

(1)
LaTeX のラベル機能って使わないと忘れちゃうよね (´・ω・‘)
(1) っていうのは手書きです. まぁ自分らしくやっていく.

[*2] 参照うまくできてるかな (´・ω・‘) どっきどきである.

ダランベールの定理を利用する.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

に対して, $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| =: c < \infty$ ならば, 収束半径 $R := 1/c$.

$c = 0$ となるため, 収束半径は f, g ともに ∞ である.

(☆)

ここで次の Lemma を示す. これはどちらかというとズルな気もするがよしとする. (そもそもこの級数を見て, Maclaurin 展開[*3] を連想しないならば, 私と同様に相当の勉強不足であろう.)

($a > 0$ のとき)

$$f(x) = \frac{\sinh(\sqrt{a}x)}{\sqrt{a}},$$
$$g(x) = \cosh(\sqrt{a}x).$$

($a < 0$ のとき)

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{|a|}x)}{\sqrt{|a|}},$$
$$g(x) = \cos(\sqrt{|a|}x).$$

$a > 0$ としよう. このとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{a}x)^{2k+1}}{\sqrt{a}(2k+1)!} \\ &= \frac{\sinh(\sqrt{a}x)}{\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

他の場合についても同様に示せる. ただし,

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots,$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

を覚えていなかった人は, 私とともにぜひ反省してください (´・ω・‘)

腹筋 10 回.

(2), (3), (4)

Lemma より自明に成り立つ. ただし,

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

[*3] スペルわかんなくて調べた (´・ω・‘)

を覚えていなかった人は, 私とともにぜひ反省してください (´・ω・‘)
背筋 10 回.

[A-4]

$t > 0$ に対して, 複素平面 $\mathbf{C}$ 上の有理巻数を $f(z) = \exp(itz)/(1+z^2)$ で定める. また, $R > 726$ に対して[*4], $c_1 = [-R, R]$ と $c_2 = R\exp(i\theta)(0 \leq \theta \leq \pi)$ を結ぶ正の向きの曲線を Γ_R とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(z)$ の極と留数を全て求めよ.
(2) $\int_\Gamma f(z)dz$ を求めよ.
(3) 広義積分

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(tx)}{1+x^2}dx$$

を求めよ.

(1)
おお, この (1) ってやつは参照でもってきたぜい (´・ω・‘) label コマンドと, ref(qref) コマンドでもってくるんだね. それにしても, qexam.sty は便利だ. 本当に.
というわけでやっていきましょう. 留数といえば, ロピタルの定理.

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{z^2+1}$$

であるから, $z = \pm i$ にて極をもつ. 従って,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(z=i) &= \lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{itz}}{z^2+1} \\ &= \frac{e^{-t}}{2i}.\end{aligned}$$

z = −i は読者への練習問題とする.
(2)
留数定理により,

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\mathrm{Res}(z=i) = \pi e^{-t}.$$

(3)
Jordan の補助定理により, $\deg f \leq \deg g - 1$ のとき,

$$\int_\Gamma \frac{f}{g}\cdot e^{itz}dz = \int_{\mathbf{R}} \frac{f}{g}\cdot e^{itz}dz$$

が成立する.

[*4] 適当に今日の日付の 726 にした (´・ω・‘) 仕事行きたくない死にたい

従って,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\cos(tz)}{1+z^2}dz = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itz}}{1+z^2}dz\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\oint_{\Gamma} \frac{e^{itz}}{1+z^2}dz\right)$$
$$= \pi e^{-t}.$$

というわけで, 3 連休やりたいと思っていたことがまだ一個も終わってないねぇ (´・ω・‘)

あ、一応サックス頑張ったから, それだけは認めてあげよう.

解答の作成, まだ終わってはいないけど, 今日はいまから JTB に ”go to Travel”のお話を聞きに行こう. てかまじで [A-2] とけんのやけど (´・ω・‘)

岡山大学は私より 2 ランク上のあたりの難易度の問題を出してくる印象ですね. まぁ私より高いというより, 私が数弱すぎることが問題. 着替えていってきますね・з・

以下追記です.(7/27 23:50)

というわけでなんとか月曜日ですが, とき終えました. [A-2] についてはみやをさんに教えていただきました. 大変ありがたく思います.

そのときの画像をのせて, 有終の美といたします.

もう二度とやんねえぞくそ (つ´;ω;`) つ

THEME

[A-2] (iv) $\Rightarrow$ (v) を示す.

$\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ V上の部分空間をなす.

従って, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = m$ とおく.

すなわち $\exists v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m$ s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle, \\ \mathrm{Ker}(f) = \langle u_1, \cdots, u_m \rangle. \end{cases}$$

ここで次元定理より,

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ &= n + m. \end{aligned}$$

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) = 0$$ とすると,

(※) $$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = -(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m) \ (=: k)$$

L.H.S. $\in \mathrm{Im}(f)$, R.H.S. $\in \mathrm{Ker}(f)$ であるから,

$$k \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}.$$

(※)の L.H.S. $= 0$ より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$,

(※)の R.H.S. $= 0$ より $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$ が従うことから,

$v_1, \cdots, v_n$ および $u_1, \cdots, u_m$ はそれぞれ一次独立.

今, $K := \langle v_1, \cdots, v_n, u_1, \cdots, u_m \rangle \subset V$ に対して,

$$\dim K = n + m = \dim V.$$

$\therefore$ $K = V$ が従う. すなわち,

$$\begin{aligned} V &= \langle v_1, \cdots, v_n \rangle \oplus \langle u_1, \cdots, u_m \rangle \\ &= \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f). \ // \end{aligned}$$