ぼくのかんがえたさいきょうのとうあん

にーと

作成日 2020 年 7 月 19 日

1

$$A := \begin{pmatrix} 1+a & a & -2a \\ -a & 1-a & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求める.

3 行目に 2 つの 0 があるのでこの行で余因子展開を行う.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & a & -2a \\ -a & 1-a-\lambda & 2a \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1+a-\lambda & a \\ -a & 1-a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((1-\lambda+a)(1-\lambda-a)+a\right) \\ &= (1-\lambda)^3 \end{aligned}$$

ゆえに固有値は, $\lambda = 1$.

(2) A を対角化せよ.

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, すなわち $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考えよう. $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とおき固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める. すなわち,

$$\begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -a & -a & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をとけば良い. [*1]

[*1] saitama_190821.pdf のコピペなので, 行列を書くのがぜんぜんしんどくない. 楽だ. ただし LaTeX の勉強になるかどうかでいえば, 全くならないといえる. どちらかというと Vim の勉強ということにする.

この連立方程式は $x+y-2z=0$ と同値である. 連立方程式の自由度は 2 であるから, $s,t \in \mathbf{R}$ の 2 つの自由変数を用いる. $y=s, z=t$ とすると, $x=-s+2t$ である. よって, 解は次のように表せる.

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有空間の次元が 2 であることから, 残念ながら対角化は不可能である.

2

次の行列 A による線形写像 f を考え, その核及び像の基底を求めよ.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

また行列かよ (´・ω・‘)

というわけで, 下書きなしで書いていく. (追記:無理でした (´・ω・‘))

まず Ker(f) を求める. Ker(f) は次の方程式の解空間である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に対して, 以下のように行基本変形を繰り返していく.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ \to & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ \to & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって次の連立方程式の解空間が求めたい f の核である.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解の自由度は 2 であるから, 自由変数を 2 個用いて $x_1=s, x_2=t$ とおくと,

$$\mathrm{Ker}(f) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

次に $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求める．$\mathrm{Ker}(f)$ の次元が 2 であるから, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim \mathbf{R}^4 - \mathrm{Ker}(f) = 4 - 2 = 2$ である.

例えば, $\mathbf{R}^4 \setminus \mathrm{Ker}(f) \ni \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と選べば,

$$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{Im}(f)$ の基底をなす.

3

計算せよ.

(1)

$$\int_0^\infty xe^{-nx}dx = \frac{1}{n^2}.$$

(2)

$$\int_0^\infty x \sum_{n=1}^\infty e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty xe^{-nx}dx$$

を示せ.

$f_n = x\sum_{k=1}^n e^{-kx}$ とすると,

$$\text{L.H.S.} = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

ここで, 等比級数の公式により,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x\left(e^{-x} + \cdots + e^{-nx}\right) \\ &\uparrow \frac{x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

よって単調収束定理により,

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(xe^{-x} + \cdots xe^{-nx}\right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty xe^{-kx}dx\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty xe^{-nx}dx.
\end{aligned}$$

(3)

(1), (2) より,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}dx$$

が成立する.

4

$\mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$ 上の関数

$$f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$$

に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $f_x = f_y = 0$ となる (x,y) を求めよ.
(2) f の極大点をすべて求めよ.

クーラー寒い. けどリモコンが見当たらない.
くそう (´；ω；`) でももうちょいや (´；ω；`)

$$\begin{aligned}
f_x &= y\left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) \\
f_y &= x\left(\log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

が成立する. ここで $f_x = f_y = 0$ とする. これは本質情報なのですが, $f_x = 0, f_y = 0$ の 2 式は, $f_x + f_y = 0, f_x - f_y = 0$ の 2 式に同値です. 理由は次回までに考えておいてください.(´・ω・‘)

$\log(x^2+y^2)+2x^2/(x^2+y^2)\neq 0$ とすると, $y=0$ であるから $(x,y)=(\pm 1,0)$. 同様に, $(0,\pm 1)$ も条件を満たす. 次に $\log(x^2+y^2)+2x^2/(x^2+y^2)=0$ とする.

$$\log(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=0$$
$$\log(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}=0$$

が従う. まずこの 2 式の差をとることにより, $x^2=y^2$ が成立する. 次にこの 2 式の和をとることにより,

$$\begin{aligned}&2\log(x^2+y^2)+\frac{2x^2+2y^2}{x^2+y^2}\\&=2\log(x^2+y^2)+2\\&=0,\end{aligned}$$

すなわち,$x^2+y^2=1/e$ が従う.

これらより, $f_x=f_y=0$ を満たす (x,y) は

$$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}},\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}),(0,\pm 1),(\pm 1,0).$$

$(x,y)=(0,\pm 1),(\pm 1,0)$ においては極大値とならないことを示す. $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする.

$$\begin{aligned}f(x,y)&=xy\log(x^2+y^2)\\&=\frac{r^2}{2}\log r^2\sin 2\theta\\&=: g(r,\theta).\end{aligned}$$

ここで, $r^2\log r^2, \sin 2\theta$ はそれぞれ $(x,y)=(0,1)$ 付近で r,θ を増加させるにつれ, 単調に増加する関数である. 従って, $(x,y)=(0,1)$ 付近において極値はとりえない.

同様に, $(x,y)=(0,1)$ 付近では, r を増加させる一方, θ を $\pi/2+\varepsilon\to\pi/2-\varepsilon$ と減少させることにより, g を単調に増加させることができる. つまりこの点においても極値をとりえない. 同様にすれば, $(x,y)=(\pm 1,0),(0,\pm 1)$ の 4 点において極値を取らないことがわかる.

次に, $(x,y)=(\pm 1/\sqrt{2e},\pm 1/\sqrt{2e})$ の 4 点のうち, 第 i 象限にある点を P_i とする.

まず定石に従ってヘッセ行列を求めよう. $f_{xy}=f_{yx}$ であることに注意して, 二階微分を求めていく.

$$\begin{aligned}f_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}f_x\\&=\frac{2xy(x^2+y^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\f_{yy}&=\frac{\partial}{\partial y}f_y\\&=\frac{2xy(x^2+y^2+2x^2)}{(x^2+y^2)^2}\\f_{xy}&=\frac{\partial}{\partial y}f_x\\&=\log(x^2+y^2)+\frac{2((x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

よって P_i におけるヘッセ行列は,

$$\begin{aligned} H := & \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 4xy \cdot e & 0 \\ 0 & 4xy \cdot e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $x^2 + y^2 = 1/e, (x, y) = (\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e})$ を用いた. 従って,

$$\det H = f_{xx} f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$$

が従い, 各 P_i にて極値をもつことがわかる.

さてこれはコピペなのですが,

- $\det H > 0$ であり, $f_{xx} > 0$ であれば, 極小値をもつ.(1 変数のときのあれと似てる)
- $\det H > 0$ であり, $f_{xx} < 0$ であれば, 極大値をもつ.(1 変数のときのあれと似てる)
- $\det H < 0$ であれば, 鞍点をもつ.
- $\det H = 0$ であれば, よくわからない (´・ω・‘).

だそうです. 皆様は忘れないように気をつけてくださいね.

というわけで, $(x, y) = (-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}), (1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$ にて極大値をとることが示せた.

というわけで, 今日 1 日全部捨てたねぇ (´・ω・‘)

かなしいねぇ (´・ω・‘)

昨日はサックス頑張ったから, 今日は軽く切り上げて ”go to キャンペーン”でも調べようと思ってたのによぉ (´;ω;`)

こんなこともう二度としません.

お付き合いいただきありがとうございました.

では (つ´・ω・‘) つ