ぼくのかんがえたさいきょうのとうあん

にーと

作成日 2020 年 7 月 11 日

1

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求める.

$$\begin{aligned}
|A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \left\{ (2-\lambda)(1-\lambda) + 1 + \lambda \right\} - (3 - 3\lambda - 1 - \lambda) \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1).
\end{aligned}$$

ゆえに固有値は, $\lambda = 1, -1, 2$.

(2) A を対角化せよ.

$AX = \lambda \boldsymbol{x}$ を考える. $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ とおき, 各固有値 λ に対する固有ベクトルを求める. すなわち,

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

をとけば良い. (行列を書くのがもう本当にしんどくて苦しいので答えを書くだけにする.)

$s, t, u \in \mathbf{R}$ を任意定数とする.

(1)$\lambda_1 = 1$ のとき,

$$\boldsymbol{x_1} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)$\lambda_2 = -1$ のとき,

$$\boldsymbol{x_2} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3)$\lambda_3 = 2$ のとき,

$$\boldsymbol{x_3} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

がわかる.

$s = t = u = 1$ とおく. これら固有ベクトルを並べ,

$$P := \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1}, & \boldsymbol{x_2}, & \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$$

を定めれば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が得られるはずである.

2

(1) 次の連立方程式が解を持つという. 解け.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ k \\ 7 \end{pmatrix}$$

また行列かよ (´・ω・‘)

というわけで, 掃き出していき次のようにする.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って, 解を持つためには $k = 1$ が要請され, そのとき (x_1, x_2, x_3, x_4) は自由度 2 の解をもつ. $s, t \in \mathbf{R}$ を任意定数とすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る.

(2) $f: V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への同型写像とする. $\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}$ を V の基底とするとき, $f(\boldsymbol{v_1}), \cdots, f(\boldsymbol{v_n})$ は W の基底をなす. 示せ.

f が同型写像である $\Leftrightarrow$ f, f^{-1} が線形写像かつ全単射かつ連続, つまり最強.
実際に, 背理法で示していこう. $f(\boldsymbol{v_1}), \cdots, f(\boldsymbol{v_n})$ が W の基底をなさないと仮定する.
これらが基底をなさないのであるから, $\exists i$ s.t.

$$f(\boldsymbol{v_i}) = \alpha_1 f(\boldsymbol{v_1}) + \cdots + \alpha_{i-1} f(\boldsymbol{v_{i-1}}) + \alpha_{i+1} f(\boldsymbol{v_{i+1}}) + \cdots + \alpha_n f(\boldsymbol{v_n}).$$

両辺に f^{-1} を作用させれば, 同型写像の最強性により

$$\boldsymbol{v_i} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \cdots + \alpha_{i-1} \boldsymbol{v_{i-1}} + \alpha_{i+1} \boldsymbol{v_{i+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v_n}.$$

これは $V = \langle \boldsymbol{v_0}, \cdots, \boldsymbol{v_m} \rangle$ に反する. よって示せた.

3

2 変数関数 f を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = y \text{ かつ } (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(1) f は $(x, y) = (0, 0)$ において連続か.
(2) $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ を求めよ.
(3) $f_{xx}(0, 0), f_{yy}(0, 0)$ を求めよ.

(1)
不連続である. 自明.

(2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \left.\frac{df}{dx}(x, 0)\right|_{x=0} \\ &= \left.\frac{d}{dx}(0)\right|_{x=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

同様にして $f_y(0,0)=0$.

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = & \left.\frac{d^2 f}{dx^2}(x,0)\right|_{x=0} \\
= & \left.\frac{d^2}{dx^2}(0)\right|_{x=0} \\
= & \, 0.
\end{aligned}
$$

同様にして $f_y(0,0)=0$.

4

積分順序を交換することにより, 次の積分を求めよ.

$$
\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dydx
$$

別解から述べることとする. 体力が残っていれば想定解ものせるが, どうせ無理だろうから今ここで謝罪しておく.

生きててごめんね (つ ´ ; ω ; `) つ

積分範囲を座標平面に図示すると, 半径 1 の半円の内部であることがわかる.

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおく. $dxdy=rdrd\theta$ であるから, $(\partial(x,y)/\partial(r,\theta)=r$ による$)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dydx &= \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{r=0}^{r=1} dr \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{r^2+1}} \\
&= \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_{r=0}^{r=1} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}} dr
\end{aligned}
$$

が成立する.

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta &= \sin\theta|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= 1-(-1) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dydx = 2\left(\int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}} dr\right).
$$

これが求めたかったものである.

(実際にはもう少し計算できて, $\sqrt{2} - \log(\sqrt{2} + 1)$ が答えだが, 計算しなくて良い.)

この前よりは疲れなかったけど, やっぱりもう二度とやらない (´ ; ω ; `)

半日無駄にするねぇ (´ ; ω ; `)