ぼくのかんがえたさいきょうのとうあん

にーと

作成日 2020 年 7 月 5 日

1

1.1

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, 固有値を求める.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda^3 + \lambda) - (\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda^2(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 1) \\ &= (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

ゆえに固有値は, $\lambda = 1, -1$.

1.2

(1)$\lambda = 1$ のとき

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を考える. $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ とすると,

$$A - 1E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この連立方程式の一般解は, s, t を任意定数とすれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. 同様に,

(2)$\lambda = -1$ のとき

$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ を考えることにより,

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

すなわち $x = -w, y = -z$ が成立する. よって u, v を任意定数とすれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がわかる.

(1), (2) より, 固有ベクトルのみで $\mathbf{R}^4$ の基底がとれることがわかる.

すなわち,

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いれば, $P^{-1}AP$ は対角行列となる.

2

2.1

V を 2 次以下の実多項式全体のなすベクトル空間とする. V の部分集合

$$W = \{f(x) \in V | f(1) = 0\}$$

を考える.

(1) W が V の部分ベクトル空間であることを示す.

任意の $g, h \in W$ をとる. まず, $(g+h)(1) = g(1) + h(1) = 0$ より $g + h \in W$ であり, また, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して, $(\lambda g)(1) = \lambda g(1) = 0$ が成り立つ. したがって, W は部分ベクトル空間.

2.2

主張.$W = \langle x - 1, (x-1)^2 \rangle$ である.

実際, $g(x) = px^2 + qx + r \in W$ とすれば, $g(1) = p + q + r = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} g(x) &= px^2 + qx + r \\ &= px^2 + qx - (p+q) \\ &= p(x-1)^2 + (2p+q)(x\ 1) \in \langle x-1, (x-1)^2 \rangle. \end{aligned}$$

2.3

$f \cdot g := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ に対して, W の直交補空間を求める. $W = \langle x-1, (x-1)^2 \rangle$ であるから, $h \in W^{\perp}$ とすれば,

$$\int_{-1}^{1} (x-1)h(x)dx = 0$$
$$\int_{-1}^{1} (x-1)^2 h(x)dx = 0$$

$h(x) = px^2 + qx + r$ と定め, h の満たす条件を上記連立方程式により決定すればよい. 紙面の都合 (というよりも管理人の気力の低下) により,

$$p = 5r$$
$$q = 8r$$

が得られることを述べるのみとする. 従って次を得る.

$$W^{\perp} = \langle 5x^2 + 8x + 1 \rangle.$$

3

3.1

$f(x,y) = y^2 \tan^{-1}(x/y) \quad (y \neq 0)$, $f(x,y) = 0 \quad (y = 0)$ とする.f を偏微分すると以下のようになる.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{y^3}{x^2+y^2} \\ f_y &= 2y \tan^{-1}\frac{x}{y} - \frac{xy^2}{x^2+y^2} \\ f_{xy} &= \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{yx} &= \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

よって $f_{xy} = f_{yx}$.

3.2

f_{xy} が原点で不連続であることを示す. まず, $x = 0$ を満たしながら, $y \to 0$ とすると,

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^4}{y^4} \\ &= 1 \\ &\to 1. \end{aligned}$$

次に, $y = 0$ を満たしながら, $x \to 0$ とすると,

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0 \\ &\to 0 \end{aligned}$$

よって f_{xy} は原点において不連続.

4

4.1

$p > 1$ に対して,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^p}}$$

とする.

主張. $\lim_{x\to 1} f(x)$ は極限値を持つ. 実際, $0 < t < 1$ により

$$\begin{gathered} 1 - t^p > 1 - t \\ \frac{1}{1-t^p} < \frac{1}{1-t} \\ \frac{1}{(1-t^p)^{1/p}} < \frac{1}{(1-t)^{1/p}}. \end{gathered}$$

が成立する.$p > 1$ であるから,

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/p}} dt < \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^{1/p}} dt < \infty.$$

ここで $\int_0^1 1/(1-t)^{1/p} dt < \infty$ であることは, 読者への練習問題とする.(一度言ってみたかった.)

疲れた、二度とやんね（つ '・ω・') つ

4.2

終わってなかった. 最後の問を忘れてた.
くそう (’; ω:’)
というわけで最後.

$y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ とおく. このとき,

$$\frac{d}{dy}\left\{\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-1}\right\} = (1-p)g^{p-1}$$

を示す.

まず,

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^p}}$$

の両辺を, x で微分することにより,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[p]{1-x^p}}$$

を得る. 片々 p 乗して,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^p = \frac{1}{1-x^p}.$$

両辺逆数を取ると,

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^p = 1 - x^p$$

$x = g(y)$ であるから,

$$\left(\frac{dg}{dy}\right)^p = 1 - g^p$$

が得られる. これを両辺 y で微分することにより,

$$p\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-1} \cdot \frac{d^2g}{dy^2} = -pg^{p-1}\frac{dg}{dy}$$
$$\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-2} \cdot \frac{d^2g}{dy^2} = -g^{p-1}$$

ここで与えられた式の微分を計算してみよう.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\left\{\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-1}\right\} &= (p-1)\left(\frac{dg}{dy}\right)^{p-2} \cdot \frac{d}{dy}\frac{dg}{dy} \\ &= (p-1)\cdot(-g^{p-1}) \\ &= (1-p)g^{p-1},\end{aligned}$$

よって示せた.

疲れ果てた。。。もうほんとに二度とやんね。。。
(つ'；ω：')つ